

ЛЕКЦИЯ 3

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ГРАФЫ

к.т.н. Шумков ЕА
www.shumkoff.ru

Теория графов — раздел дискретной математики, изучающий графы. В самом общем смысле граф — это множество точек (вершин, узлов), которые соединяются множеством линий (рёбер, дуг).

Диаграмма одной из разновидностей графа — дерева — использовалась издавна (конечно, без понимания, что это «граф»). Генеалогическое дерево применялось для наглядного представления родственных связей.

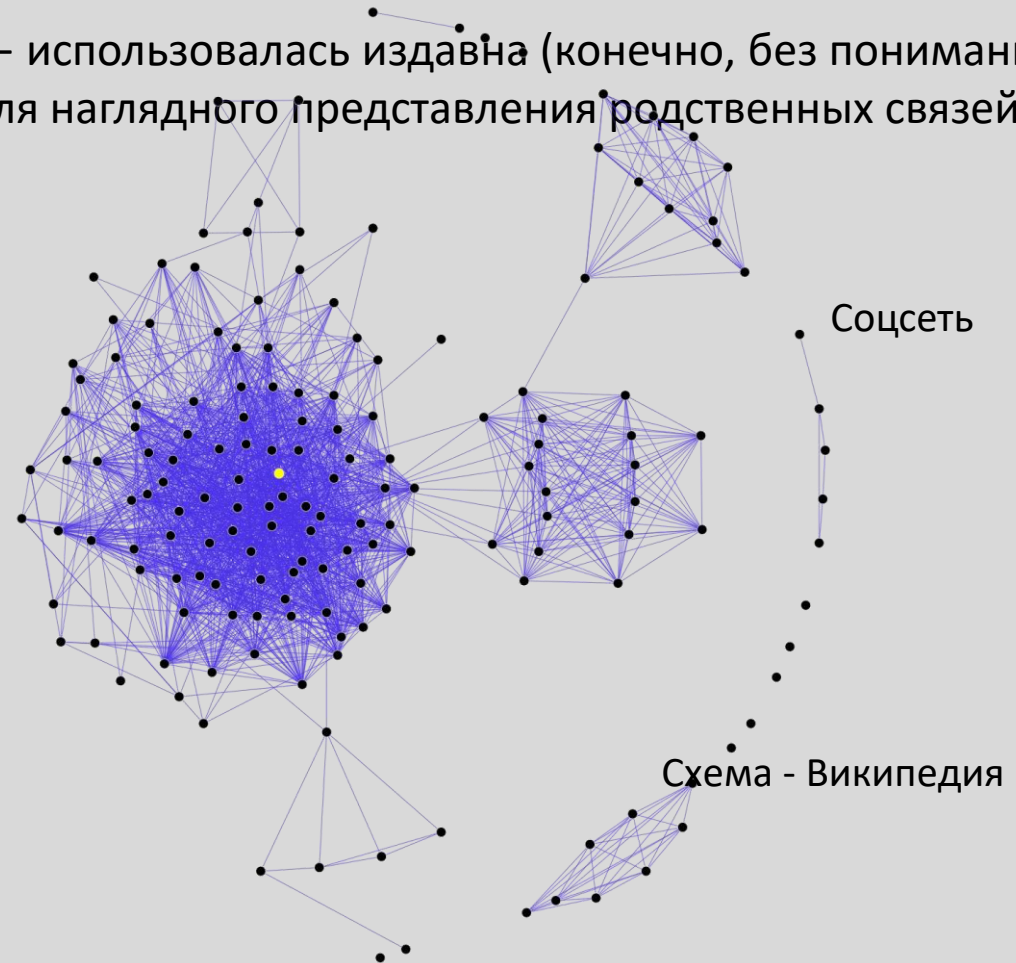
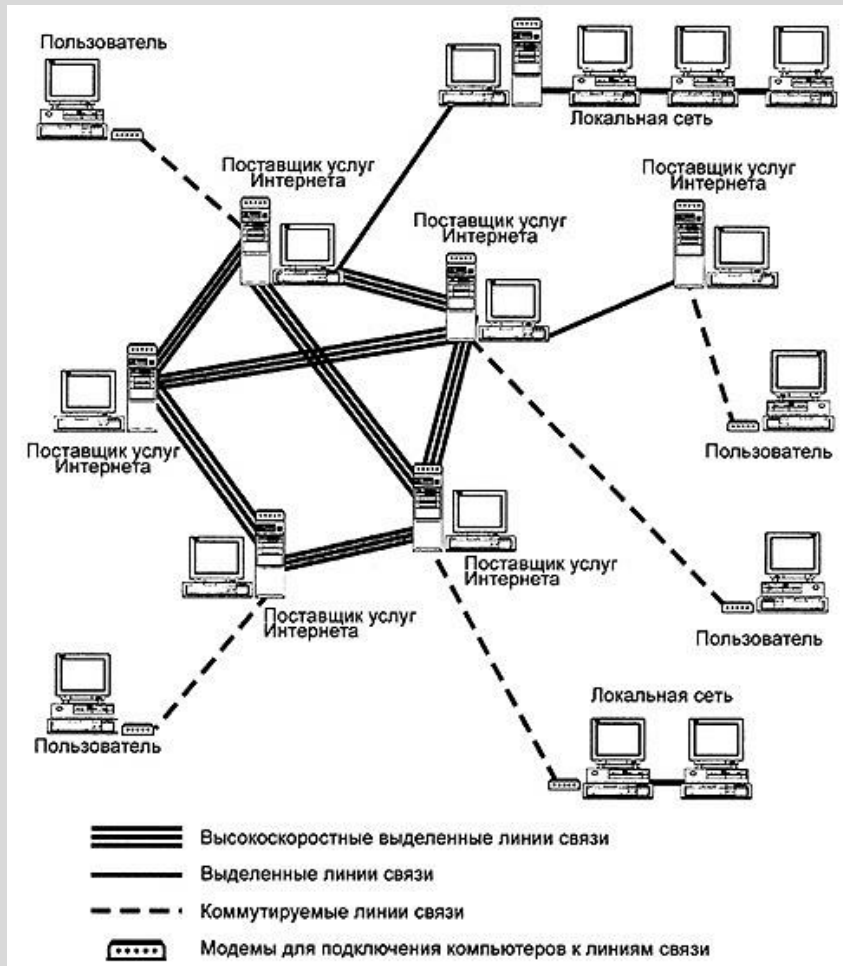


Схема - http://apsheronk.bozo.ru/student/SE/SE_Lec2.html

Шумков Е.А. <http://www.shumkoff.ru>

История семи мостов Кёнигсберга

Старинная карта Кёнигсберга.

Части города:

А — Альтштадт,

Б — Кнайпхоф,

В — Ломзе,

Г — Форштадт.

Цифрами обозначены мосты
(в порядке строительства):

1 — Лавочный,

2 — Зелёный,

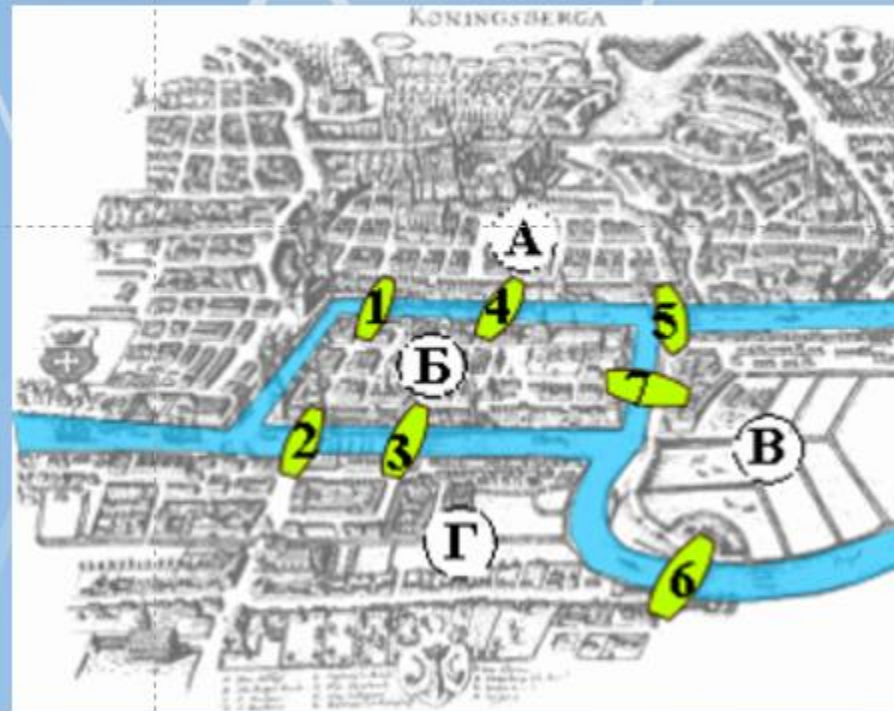
3 — Рабочий,

4 — Кузнечный,

5 — Деревянный,

6 — Высокий,

7 — Медовый



Леонард Эйлер
1707-1783



Слайд – Скляровой Е.А.

ВЫВОДЫ ЭЙЛЕРА:

Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа всегда чётно.

Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.

Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.

Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

На протяжении более ста лет развитие теории графов определялось в основном проблемой четырёх красок. Решение этой задачи в 1976 году оказалось поворотным моментом истории теории графов, после которого произошло её развитие как основы современной прикладной математики. Универсальность графов незаменима при проектировании и анализе коммуникационных сетей

Открытие теории графов

Швейцарский математик Леонард Эйлер в статье (на латинском языке, изданной Петербургской академией наук, Российская империя) о решении знаменитой задачи о кёнигсбергских мостах, датированной 1736 годом, первым применил идеи теории графов при доказательстве некоторых утверждений. При этом Эйлер не использовал ни сам термин «граф», ни какие-либо термины теории графов, ни изображения графов

В 1847 году немецкий физик Густав Кирхгоф фактически разработал теорию деревьев при решении системы уравнений для нахождения величины силы тока в каждом контуре электрической цепи. Кирхгоф фактически изучал вместо электрической цепи соответствующий ей граф и показал, что для решения системы уравнений нет необходимости анализировать каждый цикл графа, достаточно рассмотреть только независимые циклы, определяемые любым остовным деревом графа

Источник: Wikipedia (Rus)

В 1857 году английский математик Артур Кэли, занимаясь практическими задачами органической химии, открыл важный класс графов — деревья.

В 1859 году ирландский математик сэр Уильям Гамильтон придумал игру «Вокруг света». В этой игре использовался додекаэдр, каждая из 20 вершин которого соответствовала известному городу. От играющего требовалось обойти «вокруг света», то есть пройти по рёбрам додекаэдра так, чтобы пройти через каждую вершину ровно один раз

ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Теорема о четырёх красках — теорема, которая утверждает, что всякую расположенную на плоскости или на сфере карту можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. При этом области должны быть связными, а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке не считаются общей границей для них.

В 1852 году Фрэнсис Гутри, составляя карту графств Англии, обратил внимание, что для такой цели хватает четырёх красок. Теорему сформулировал доказал английский математик Артур КЭЛИ еще в 1878 году, но доказать ее удалось только в 1976 году! Это сделали Кеннет Appel и Вольфганг Хакен (Иллинойский ун-т, США).

Артур КЭЛИ — годы жизни: 1821 — 1895 гг. Работал Кембриджский ун-т
Кэли — один из плодовитейших учёных XIX века, написавший более 700 работ.

БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматривают графы двух видов – ориентированные и неориентированные.

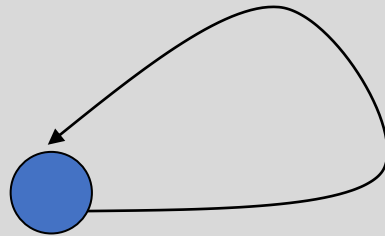
Ориентированный граф – это пара $G(V, E)$, где V – произвольное непустое множество вершин, E – множество дуг, т.е. упорядоченных пар вершин ($E \subseteq V \times V$).

Неориентированный граф определяется аналогично, но E – множество неупорядоченных пар вершин. Элементы E называются рёбрами.

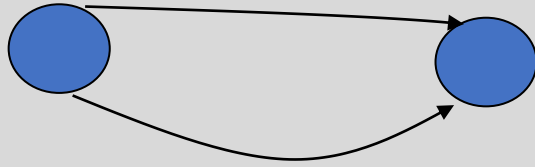
Особые случаи дуг/рёбер: петля, кратные дуги/рёбра

Петлёй называется дуга (для неориентированного графа - ребро), соединяющая вершину с ней же.

Например:



Две дуги (ребра) называются кратными, если начальные вершины этих дуг совпадают, и конечные — тоже совпадают.



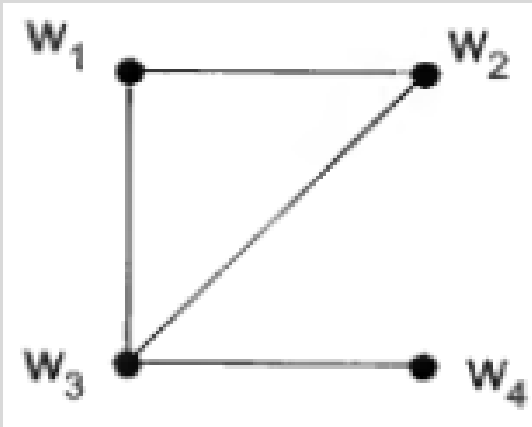
Допустимость петель и кратных дуг обычно оговаривается отдельно

Орграф – ориентированный граф

- Рассмотрим дугу (ребро) $e=(u,v)$.
- Говорят, что дуга e инцидентна вершинам u и v .
- Аналогично, вершина u и вершина v инцидентны дуге e .
- Вершины u и v называются смежными.
- Дуги (рёбра), имеющие общую вершину, также называются смежными.

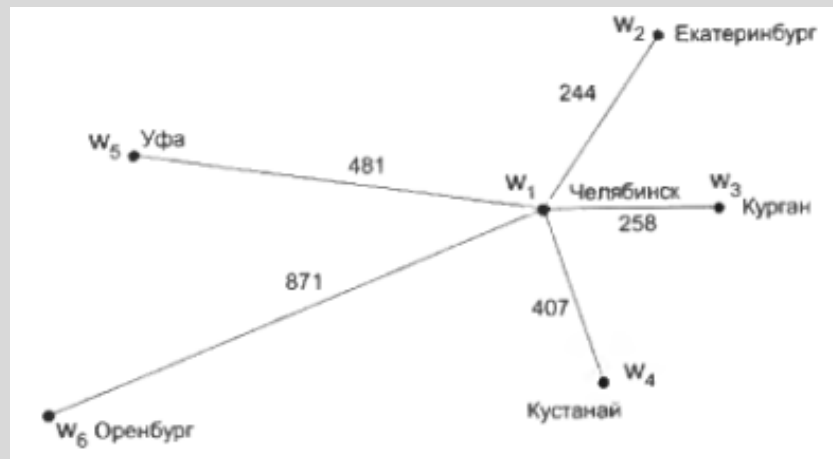
БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ (продолжение)

- СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ – это количество дуг (ребер), которым инцидентна данная вершина;
- Степень вершины v обозначается $\text{DEG}(v)$;
- Для ориентированных графов выделяют также полустепень исхода $\text{DEG}_-(v)$ и полустепень захода $\text{DEG}_+(v)$



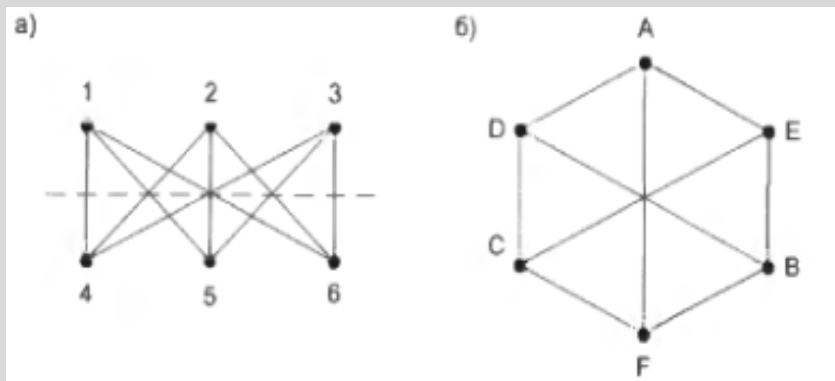
- Теорема 1. Для любого неориентированного графа сумма $\text{deg}(v)$ по всем $v \in V$ равна $2|V|$.
 - Следствие. На любом графе количество вершин нечетной степени чётно.
-
- Аналог теоремы 1 для орграфов:
Теорема 2. Для любого орграфа сумма степеней захода равна сумме степеней исхода. И эти суммы равны количеству вершин графа.

- Путь на ориентированном графе называется последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_k$, в которой для любого i вершины v_i и v_{i+1} соединены дугой.
- Путь можно понимать и как последовательность дуг.
- Для неориентированного графа аналогичная последовательность вершин/рёбер называется *цепью*.



Путь (или ЦЕПЬ) называется простым, если в нем все вершины (за исключением, может быть, крайних) различны;
 - Контуром (ЦИКЛОМ) называется путь (цепь), у которого начальная и конечная вершины совпадают

Если все вершины имеют одинаковую степень, граф – **регулярный** такой-то степени.



- Теорема 3. Если в графе степень любой вершины больше или равна 2, то в этом графе существует цикл.
- Аналогичная теорема для ориентированных графов:
Теорема 4. Если в ориентированном графе для любой вершины v $\deg_-(v) \geq 0$ и $\deg_+(v) \geq 0$, то на данном орграфе существует контур.

Циклы бывают простые и сложные. Сложные циклы содержат внутри простые циклы. Возможно и частичное перекрытие циклов.

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

● Матрица смежности:

для неориентированного графа

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для ориентированного графа –
аналогично.

● Матрица инцидентности:

для неориентированного графа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } e_j \text{ инцидентно вершине } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

для ориентированного графа:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } e_j \text{ заходит в вершину } v_i \\ -1, & \text{если ребро } e_j \text{ исходит из вершины } v_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Удаляя вершины (не все) и ребра из некоторого графа, получают **подграф**.

А сам граф именуется **надграфом**.

Если вершины не удаляются, получают **истинный подграф**.

Отношение «быть подграфом» распространяется и на сам граф (аналогично понятиям «множество» – «подмножество»)

Графы **эквивалентны**, если они, конечно, имеют одинаковый порядок и одинаковый характер связей – соответствующие вершины в обоих графах или связаны каким-то ребром или же не связаны вовсе

Длина маршрута (пути) – это количество проходимых ребер.

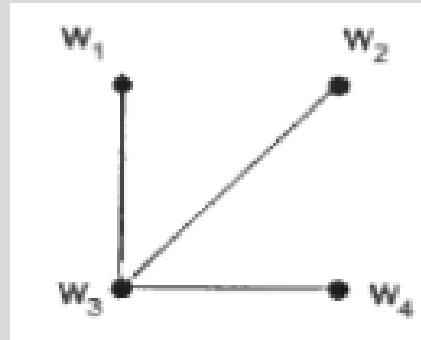
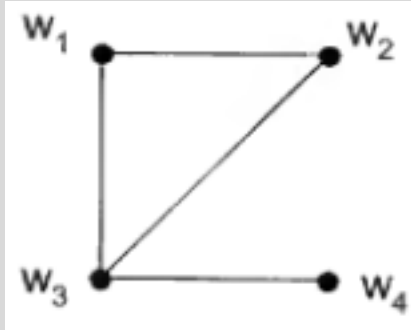
Граф без циклов – **ациклический**.

В **связном графе** любые две вершины взаимно достижимы, т. е. существует хотя бы один маршрут из любой вершины в любую другую

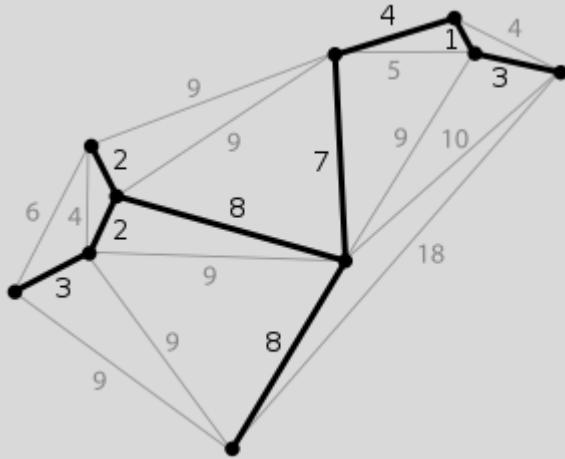
Дерево – это связный ациклический граф

В **корневом дереве** одна из вершин специально выделяется и именуется **корень**.

Остовное дерево – это остовный подграф, являющийся деревом



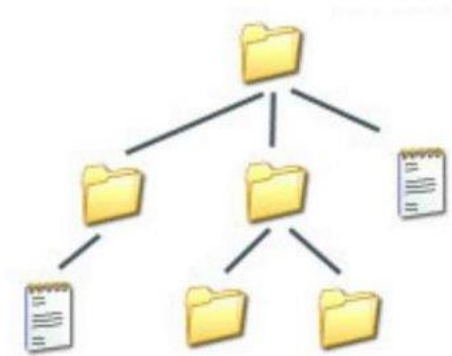
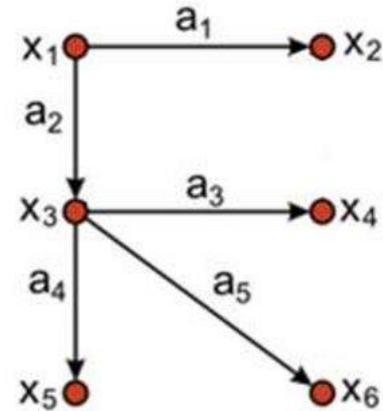
Остовное дерево графа (англ. Spanning tree) — это дерево, подграф данного графа, с тем же числом вершин, что и у исходного графа. Неформально говоря, остовное дерево получается из исходного графа удалением максимального числа рёбер, входящих в циклы, но без нарушения связности графа. Остовное дерево включает в себя все n вершин исходного графа и содержит $n - 1$ ребро.



Остовные деревья.

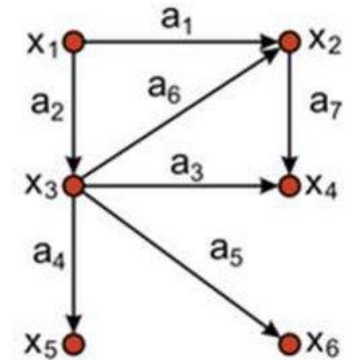
Деревом называется связный ациклический граф.

Т.е. в таком графе есть путь между любой парой вершин, причём этот путь – единственный.



Остовное дерево графа - ациклический связный подграф в который входят все его вершины.

ppt-online.org



ЛИТЕРАТУРА:

- Кристофидес Н. Алгоритмы на графах. — М.: Мир, 1974
- Носов В.А. «Комбинаторика и теория графов», курс лекций.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm>