КубГТУ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
Лекция 2 (заочники)

КОМБИНАТОРИКА

к.т.н. Шумков Е.А.
каф ИСП

Комбинаторика (иногда называемая комбинаторным анализом) — раздел математики, посвящённый решению задач, связанных с выбором и расположением элементов некоторого (чаще всего конечного) множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет некоторую выборку из элементов исходного множества, которая называется комбинаторной конфигурацией.

Простейшие примеры комбинаторных конфигураций: перестановка, сочетания и размещения

Типичные задачи комбинаторики:

1. Определить количество комбинаторных конфигураций, соответствующих заданным правилам
2. Найти практически пригодный алгоритм их полного построения
3. Определение свойств заданного класса комбинаторных конфигураций

Термин «комбинаторика» был введён в математический обиход **Лейбницем**, который в 1666 году опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве»

Лейбниц
(Википедия)

Еще немного из истории:
Комбинаторика возникла в XVI веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Дальнейшие развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера.

ПРИНЦИП СЛОЖЕНИЯ

Задача

В классе 7 девочек и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?
Решение: Для работы у доски мы можем выбрать девочку 7 способами **или** мальчика 8 способами.
Общее число способов равно 7+8=15.

Еще задача
В классе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике и по истории. Сколько человек имеют пятерку по математике или по истории?
Решение: Так как 4 человека входят и в семерку отличников по математике и в девятку отличников по истории, то сложив «математиков» и «историков», мы дважды учтем этих четверых, поэтому вычтя их один раз из суммы, получим результат 7+9-4=12.
Итак, 12 человек имеют пятерку по математике или по истории.

Принцип сложения 1: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами и эти способы различны, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m***.

Принцип сложения 2: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m-k*** способами, где ***k*** – это количество повторяющихся способов.

ПРИНЦИП УМНОЖЕНИЯ

Принцип умножения: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** *можно получить* ***m*** способами, то объект ***«a и b»*** можно получить ***m·n*** способами.

Задача: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?

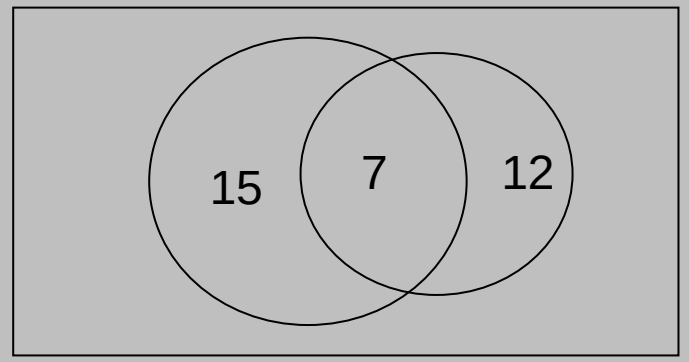
Решение: Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее 5·5=25.

1) Из 10 коробок конфет, 8 плиток шоколада и 12 пачек печенья выбирают по одному предмету
2) для новогоднего подарка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Коробку конфет можно выбрать 10 способами, шоколад – 8, печенье – 12 способами. Всего по принципу умножения получаем $10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$ способов.

В группе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?

Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий 15+12-7=20. Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей. 24-20=4. 4 человека не изучает ни одного языка.



ПЕРЕСТАНОВКА

Определение перестановки:

Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов

Дано множество $A = \{a; b; c\}$

Составить все перестановки этого множества.

Решение. $(a;b;c);(a;c;b);(b;a;c);(b;c;a);(c;a;b);(c;b;a)$

Число всех перестановок $P_n = n!$

В команде 6 человек. Сколькими способами они могут построиться для приветствия?

РЕШЕНИЕ Число способов построения равно числу перестановок 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Число перестановок n – элементов, в котором есть одинаковые элементы, а именно элементов *i* –того типа ($i = 1,2,\ldots,k$) вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots . n_k!},$$

где $$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

Доказательство. Так как перестановки между одинаковыми элементами не изменяют вид перестановки в целом, количество перестановок всех элементов множества нужно разделить на число перестановок одинаковых элементов

<u>Задача</u>: Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?
Решение: В слове «экзамен» все буквы различны, поэтому используем формулу для числа перестановок без повторений $P_7 = 7! = 5040$.

В слове «математика» 3 буквы «а», 2 буквы «м», 2 буквы «т», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k попарно различных элементов, выбранных каким-либо способом из данных n.

ПРИМЕР: Дано множество $A = \{a; b; c\}$. Составим все 2-размещения этого множества.

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b)$$

ТЕОРЕМА Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

ПРИМЕР: Абонент забыл последние 3 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он вспомнил, что эти последние цифры разные?

РЕШЕНИЕ

Задача сводится к поиску различных перестановок 3 элементов из 10 (так как всего цифр 10).

Применим формулу для числа перестановок.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$$

ЕЩЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Размещением с повторением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов возможно с повторениями

ПРИМЕР - Дано множество $A = \{a; b; c\}$

Составим 2- размещения с повторениями

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

ТЕОРЕМА

Число k- размещений с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ю. Е. Шишмарев, Дискретная математика. Конспект лекций, Ч.2. ВГУЭС, 2002г.
2. Е. С. Вентцель, Л.А. Овчаров, Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М: Высшая школа, 2000г.