КубГТУ
kubstu.ru

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
Лекция 1

Discretus (лат.) – прерывистый, состоящий из отдельных частей

автор: к.т.н. Шумков Е.А.
www.shumkoff.ru

Дискретная математика (ДМ) — часть математики, изучающая дискретные математические структуры, такие, как графы и утверждения в логике.

В контексте математики в целом дискретная математика часто отождествляется с конечной математикой — направлением, изучающим конечные структуры — конечные графы, конечные группы, конечные автоматы.

Дискретная величина – это величина между отдельными значениями которой, заключено лишь конечное число других ее значений (противоположное понятие – непрерывная величина).

Специфика дискретной математики – отказ от классических понятий непрерывности и предела.

Важнейшими задачами ДМ являются задачи типа алгоритмической разрешимости и построения конкретных решающих алгоритмов.

РАЗДЕЛЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ:

1. Комбинаторный анализ
2. Теория графов
3. Теория кодирования
4. Теория функциональных систем
5. Математическая логика
6. Теория алгоритмов и др.

Литература по курсу:

1. **Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 272 с. (6-е изд. в 2010)**
2. **Дискретная математика. Энциклопедия / Гл. ред. В. Я. Козлов. — М.: Большая российская энциклопедия, 2004. — 382 с.**
3. **Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер. 2001.**
4. **Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретная математика. М.: Наука. 1992**
5. **Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 2001**

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Основоположник – **Георг Кантор** (1845 – 1918 гг.)

Мы будем говорить о множестве, как об определенной совокупности объектов, которые будем называть элементами множества.

Традиционно множества будем обозначать заглавными буквами: A, B, C, . . . , а элементы маленькими буквами: a, b, c, ... Если элемент множества a принадлежит множеству A, то будем писать

$\in$ $x \in A,\ x \notin A$

.. и в противном случае

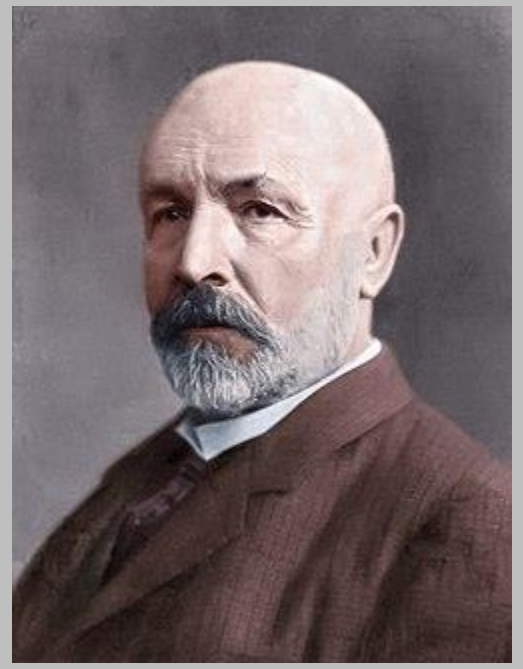
Мощность множества – количество элементов в множестве |A|

Пустое множество – это множество, которое не содержит ни одного объекта $\varnothing$

Множество, состоящее из конечного числа элементов – конечное, другие множества - бесконечные

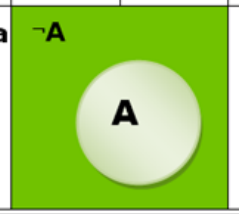
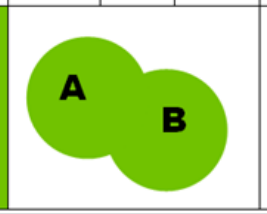
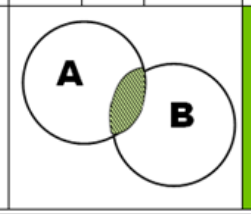
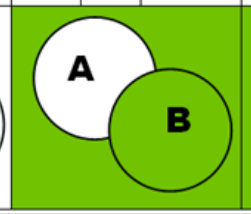
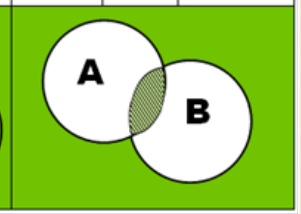
Да, кстати, Кантор родился в Санкт-Петербурге.., но учился в Берлинском университете (проф. Вейерштрассе).

P.S. Основатель теории множеств, но часть ее идей встречались у предшественников, например, у Б.Больцано



Кантор (фото - Википедия)

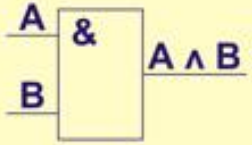
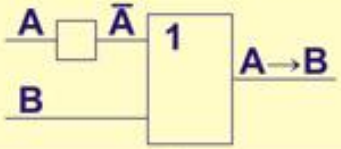
ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

	Логическое отрицание (инверсия)		Логическое сложение (дизъюнкция)			Логическое умножение (конъюнкция)			Логическое следование (импликация)			Логическая операция эквивалентности (равнозначность)		
Таблица истинности	A	¬A	A	B	A ∨ B	A	B	A^B	A	B	A→B	A	B	A↔B
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
			0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Диаграмма Эйлера-Венна														

Основные логические связки

Связка	Название	Обозначение	Полученное высказывание	Математическая запись
И	конъюнкция	&, ∧, •	А И В	A & B, A ∧ B, A • B
ИЛИ	дизъюнкция	V, +	А ИЛИ В	A V B, A + B
НЕ	отрицание, инверсия	-, ⌉, ~	НЕ А	-B, ⌉A, ~A
ЕСЛИ … ТО	импликация	→, ⊃	ЕСЛИ А, ТО В	A → B, A ⊃ B
ЛИБО … ЛИБО	исключающее или, неравнозначность	⊕, Δ, ≠	ЛИБО А ЛИБО В	A ⊕ B, A Δ B, A ≠ B
ЕСЛИ И ТОЛЬКО	эквивалентность, равнозначность	≡, ~	А, ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ В	A ≡ B, A ~ B

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ОПЕРАЦИЯ	ОБОЗНАЧЕНИЕ	БЛОКИРОВАТЬ ОБЪЕКТ	ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ИЛИ ФРАГМЕНТ СХЕМЫ
ИНВЕРСИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ)	не A, $\bar{A}$, ¬A, not A, <>	A: 0, 1 $\bar{A}$: 1, 0	
КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)	A и B, A & B, A ∧ B, A and B, A • B	A: 0, 0, 1, 1 B: 0, 1, 0, 1 A ∧ B: 0, 0, 0, 1	
ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)	A или B, A + B, A | B, A v B, A or B	A: 0, 0, 1, 1 B: 0, 1, 0, 1 A v B: 0, 1, 1, 1	
ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)	если ..., то ... A → B, A ⇒ B, A or B	A: 0, 0, 1, 1 B: 0, 1, 0, 1 A → B: 1, 1, 0, 1	
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОЗНАЧНОСТЬ)	тогда и только тогда, когда ... A ↔ B, A = B, A ~ B	A: 0, 0, 1, 1 B: 0, 1, 0, 1 A ↔ B: 1, 0, 0, 1	

http://shkola-rf.narod.ru

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов (только для конечных множеств)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

Пример: $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{Иванов, Петров, Сидоров\}$

2. Указание характеристического свойства,
то есть свойства, которым обладают все элементы множества и не обладают никакие другие элементы, не принадлежащие данному множеству
(для любых множеств)

$$A = \{x / P(x)\}$$

Принцип объемности (Г.Кантор)

Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B,\ A \neq B$

Пример1: $A = \{x / x = 2m,\ m \in Z_+\}$

$$B = \{x / x \in Z_+,\ x = p + q,\ p = 2k_1 + 1,\ k_1 \in N,\ q = 2k_2 + 1,\ k_2 \in N\}$$

$$A = B$$

Действительно:

Пусть $x \in A$, тогда $x = 2m,\ m \in Z_+,\ x = \underbrace{(2m-1)}_{p} + \underbrace{1}_{q}$,тогда $x \in B$

Пусть $x \in B$, тогда $x = (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) = 2(k_1 + k_2 + 1)$,тогда $x \in A$

Пример2: {1,2,3} = {3,2,1}

Отношение включения - $\subseteq$

$A \subseteq B$, если каждый элемент множества А является элементом множества В.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\textit{Если } A \subseteq B,\ A \neq B,\ \textit{то } A \subset B$$

А – собственное подмножество множества В.

Пример: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

Утверждение1.

1. Для любого множества X выполняется $X \subseteq X$
2. Для любых множеств X, Y, Z выполняется следующее свойство:

   $$\textit{если} \quad X \subseteq Y, Y \subseteq Z, \quad \textit{то } X \subseteq Z$$

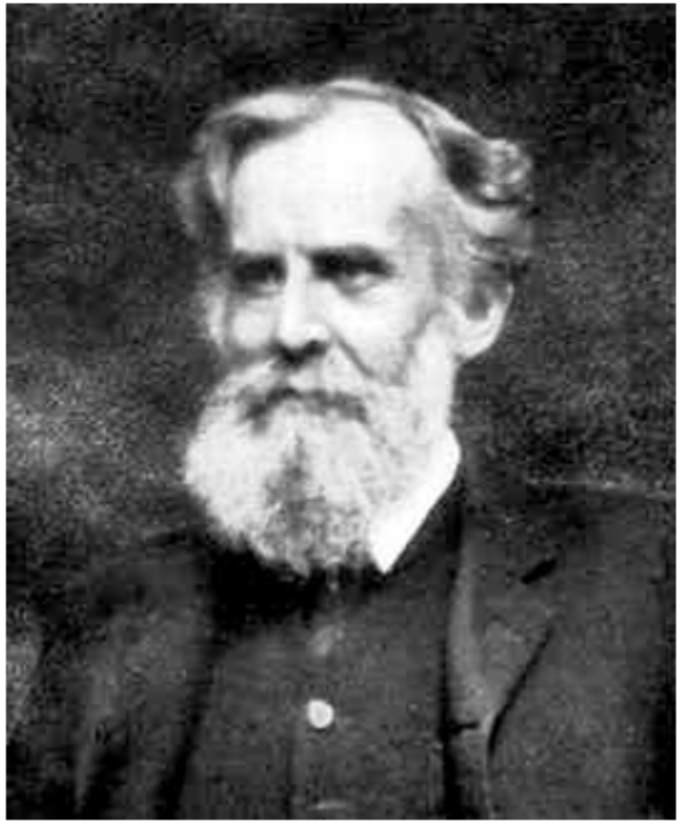
3. Для любых множеств X, Y выполняется свойство:

   $$\textit{если} \quad X \subseteq Y, Y \subseteq X, \quad \textit{то } X = Y$$

УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО – это множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов

Графическое представление множеств

Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют ***диаграммы Дж.Венна***



Английский математик (1834-1923).

Родился в семье священника. После получения высшего образования в Кембриджском Университете стал священником (1858г.).

В 1862г. Возвращается в Кембриджский Университет как лектор. В область его интересов попадали: логика, философия и метафизика.

Венн расширил булеву математическую логику и стал автором способа представления отношений между множествами.

В 1883г. Становится доктором наук Кембриджского Университета.

Множество всех подмножеств

Множеством всех подмножеств называется ***булеан*** или ***степень-множество***

Обозначение:

A – множество

P(A) – множество всех подмножеств множества A

Утверждение2.

Если множество A состоит из n элементов, то булеан множества состоит из 2^n элементов.

$$\text{если} \mid A \mid = n, \text{то } P(A) = 2^n$$

Пример: $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$P(E) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

Алгоритм построения P(A)

1. Построить двоичный набор из n элементов.

$$(0, 0,...,0) - \varnothing$$

2. Прибавлять к начальному набору 1 по правилам сложения в двоичной системе счисления до тех пор, пока не получим единичный набор.

$$\begin{array}{l} (0, 0,...,0) \\ \qquad\quad +1 \\ \hline (0, 0,...,1) - \{a_n\} \\ \qquad\quad +1 \\ \hline (0, 0,..., 1, 0) - \{a_{n-1}\} \\ \qquad\qquad +1 \\ \hline \qquad \ldots \end{array}$$

Пример: $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

1) $(0, 0, 0) - \varnothing$

2) $(0, 0, 1) - \{a_3\}$

$(0, 1, 0) - \{a_2\}$

$(0, 1, 1) - \{a_2, a_3\}$

$(1, 0, 0) - \{a_1\}$

$(1, 0, 1) - \{a_1, a_3\}$

$(1, 1, 0) - \{a_1, a_2\}$

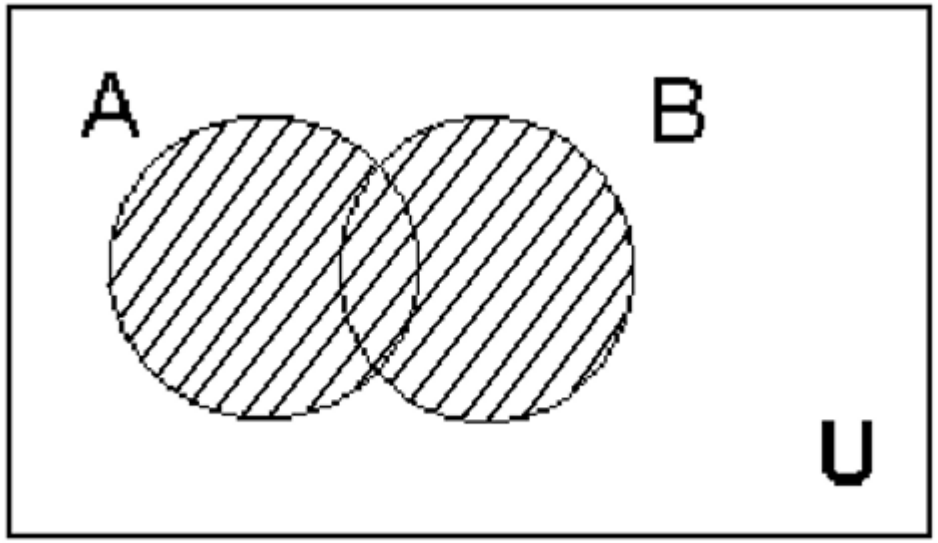
$(1, 1, 1) - \{a_1, a_2, a_3\}$

Операции над множествами

1. ***Объединение***

Объединением множеств А и В называется множество, все элементы которого являются элементами множества А или В.

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ или } x \in B\}$$



Пример:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

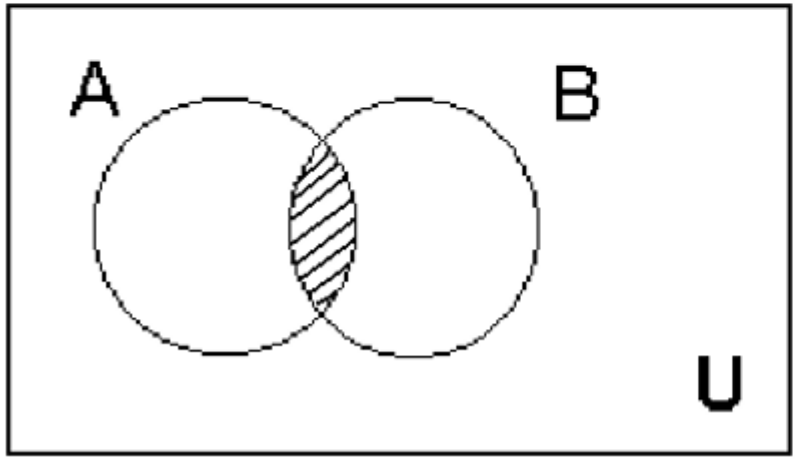
$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. ***Пересечение***

Пересечением множеств А и В называется множество, элементы которого являются элементами обоих множеств А и В.

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ и } x \in B\}$$



<u>Пример</u>:

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$

Если $A \cap B = \varnothing$, то А и В – ***непересекающиеся множества***

<u>Утверждение3.</u>

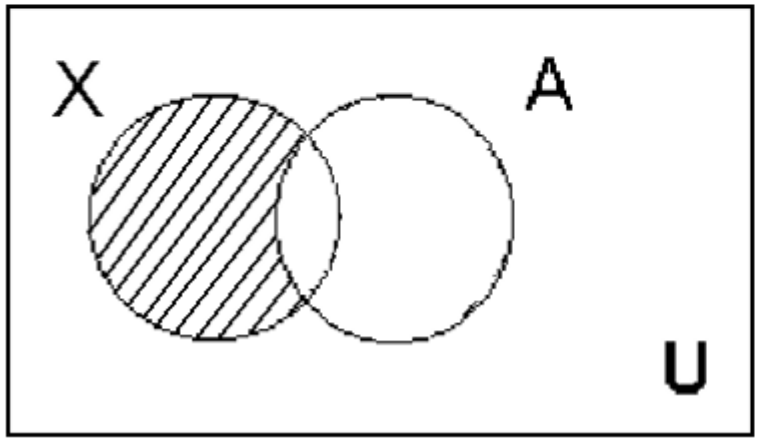
Для любых множеств А и В выполняются следующие включения:

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
2. $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

3. ***Относительное дополнение (разность)***

Разностью множеств А и В называется множество, элементы которого являются элементами множества А и не являются элементами множества В.

$$X \setminus A = \{x / x \in X \ и \ x \notin A\}$$



<u>Пример</u>:

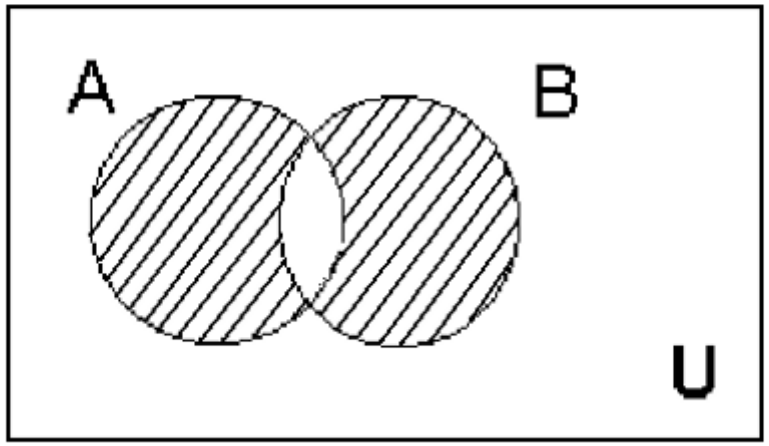
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$X \setminus A = \{1, 2\}$

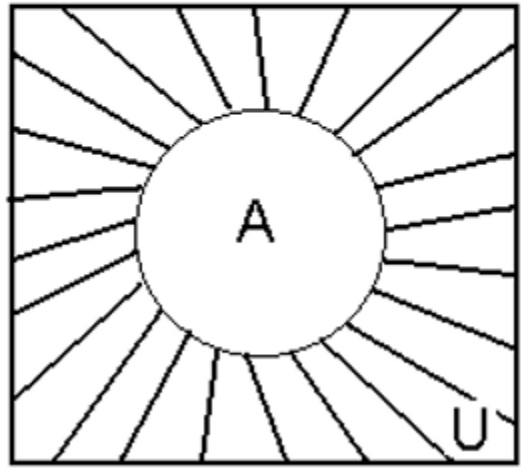
4. ***Симметрическая разность***

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



5. ***Абсолютное дополнение***

$$\overline{A} = U \setminus A$$



Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C множества U выполняются тождества:

1. ***Коммутативность***

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

2. ***Ассоциативность***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. ***Дистрибутивность***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. ***Идемпотентность***

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

6. ***Действия с U***

$$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$$

7. ***Законы де Моргана***

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

8. ***Закон поглощения***

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

9. ***Закон двойного дополнения***

$$\overline{\overline{A}} = A$$

10. ***Действия с*** $\overline{A}$

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$