КубГТУ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Лекция (заочное отделение)

1. Основы алгебры Буля
2. Булевы функции
3. Свойства булевых функций

к.т.н. Шумков Е.А.

Математическая логика в повседневной жизни

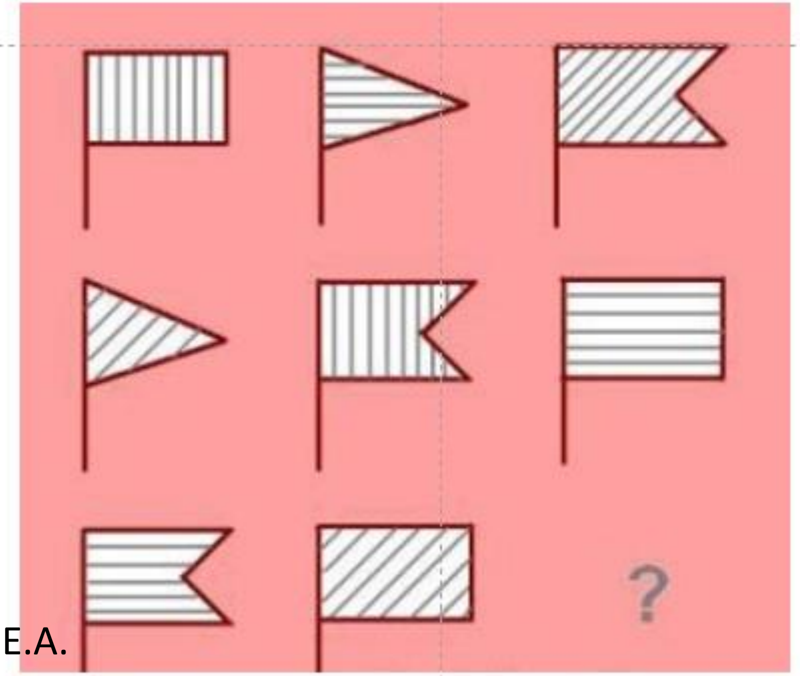


Рис. – Морозова Е.А.

ПРОСТЫЕ ПРИМЕРы ПРОДУКЦИОННЫХ ЭС

Скоринговая система

1. ЕСЛИ клиент работает на одном месте более двух лет, ТО клиент имеет постоянную работу.
2. ЕСЛИ клиент имеет постоянную работу И клиенту более 18 лет И клиент НЕ имеет финансовых обязательств, ТО клиент может претендовать на получение кредита.

ЕСЛИ Процентные ставки падают, ТО Уровень цен на бирже растет.
ЕСЛИ Процентные ставки растут, ТО Уровень цен на бирже падает.
ЕСЛИ Валютный курс доллара падает, ТО Процентные ставки растут.
ЕСЛИ Валютный курс доллара растет, ТО Процентные ставки падают.
ЕСЛИ Процентные ставки федерального резерва падают И Средства федерального резерва добавлены, ТО Процентные ставки падают.

ЕСЛИ «ПОКОПАТЬСЯ» В ИСТОРИИ, ТО ЛОГИКА ИЗ ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ….

- Термин происходит от *λόγος* - «*речь*», «*рассуждение*», «*мысль*»
- Основателем науки логики по праву называют **Аристотеля** (IV в до н. э.)

Слайд – Панькова Н.М.

Математическая логика – наука, которая изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем, которые лежат в основе работы любого компьютера.

Специальный раздел математической логики - **алгебра высказываний, или алгебра логики,** используется для **обработки логических выражений** - подобно алгебре чисел, дающей аппарат для обработки **алгебраических выражений.**

Характеристики	Применение в информатике
Алгебра логики является разделом активно развивающейся сегодня науки - дискретной математики. Алгебра логики изучает свойства функций, у которых **и аргументы, и значения принадлежат заданному двухэлементному множеству (например, {0, 1}).** Иногда вместо термина «алгебра логики» употребляют термин «двузначная логика».	**Математический аппарат** алгебры логики широко используется в информатике, в частности, в таких ее разделах, как проектирование ЭВМ, теория автоматов, теория алгоритмов, теория информации, целочисленное программирование и т. д.

Августус де Морган (1806-1871), Уильям Стенли Джевонс (1835-1882), Платон Сергеевич Порецкий (1846-1907), Чарлз Сандерс Пирс (1839-1914), Андрей Андреевич Марков (1903-1979), Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987) и др. В 1938 году американский математик и инженер Клод Шеннон (1916-2001) показал, что алгебра логики применима для описания самых разнообразных процессов, в том числе функционирования релейно-контактных и электронно-ламповых схем.

Использованы слайды Беккера И.А. (Могилев)

ЛО́ГИКА ВЫСКА́ЗЫВАНИЙ – это раздел современной (математической) логики, посвященный изучению **логических форм сложных высказываний,** образованных из элементарных высказываний с **помощью ОПЕРАТОРОВ-связок,** аналогичных союзам **И, ИЛИ, НЕ, "если…, то", "если…, и только если"** и др.

Элементарные высказывания при этом рассматриваются **как целые,** т.е. **не расчленяются на части** (такие, как субъект и предикат).

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ рассматривает **высказывания (пропозиции, предложения)** **только** с точки зрения их истинности или ложности.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ = ЛОГИКА СУЖДЕНИЙ = ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА = = ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ = =ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЙ = =ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В соответствии с «естественной» интерпретацией высказываний и свойствами логич. операций, посредством которых они построены, некоторые из полученных высказываний оказываются тождественно-истинными (т. е. истинными при всех распределениях истинностных значений исходных элементарных формул); их называют тавтологиями. Высказывания-тавтологии выражают логические законы; их выявление — одна из основных задач Логики высказываний.

Задачей ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ является приведение сложных высказываний к такой форме, чтобы для них стало возможным алгоритмическое решение вопросов логического характера в конкретной предметной области и применение автоматических методов решения. К числу таких вопросов относятся прежде всего вопросы вывода логических следствий из данных посылок или поиска доказательства выражений, выразимых в этой специальной уточненной форме; можно ли упростить форму выражения данного высказывания, и мн. др.

В логике высказываний такие задачи являются разрешимыми, и поэтому именно она особенно часто находит разнообразные технические применения в современном автоматостроении, в т.ч. и при построении (имитирующих работу нервных сетей мозга) надежных схем из не вполне надежных элементов, которым занимается новая наука – бионика; именно к логике высказываний обычно производится (непосредственно или опосредованно) сведе́ние проблем из более сложных частей логики в тех случаях, когда они допускают алгоритмическое решение. Несмотря на ее элементарный характер логика высказываний играет поэтому важную роль в современной логике.

Язык логики высказываний

Рассмотрим язык логики высказываний, состоящий из алфавита "букв" этого "языка" и правил написания "слов" (формул, т.е. сложных логических выражений) в этом алфавите.

Алфавит может выбираться при этом по-разному, но он обычно содержит: 1) "буквы", называемые "пропозициональными переменными" (число которых предполагается неограниченным);

2) в алфавит должны входить символы, являющиеся знаками для логич. связок, таких, как конъюнкция, дизъюнкция, импликация, отрицание (+ эквиваленция);

3) большинство алфавитов Логики высказываний содержит также вспомогательные знаки: обычно скобки или точки.

БУЛЕВА АЛГЕБРА

Джон БУЛЬ (1815 - 1864)

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Основоположник – **Георг Кантор** (1845 – 1918 гг.)

Мы будем говорить о множестве, как об определенной совокупности объектов, которые будем называть элементами множества.

Традиционно множества будем обозначать заглавными буквами: A, B, C, . . . , а элементы маленькими буквами: a, b, c, ... Если элемент множества *x* принадлежит множеству A, то будем писать

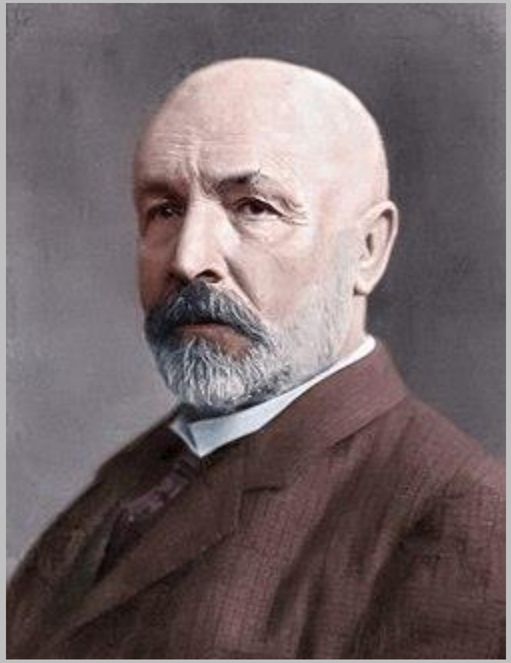
$$\in \quad x \in A, \; x \notin A$$

.. и в противном случае

Мощность множества – количество элементов в множестве |A|

Пустое множество – это множество, которое не содержит ни одного объекта $\varnothing$

Множество, состоящее из конечного числа элементов – конечное, другие множества - бесконечные

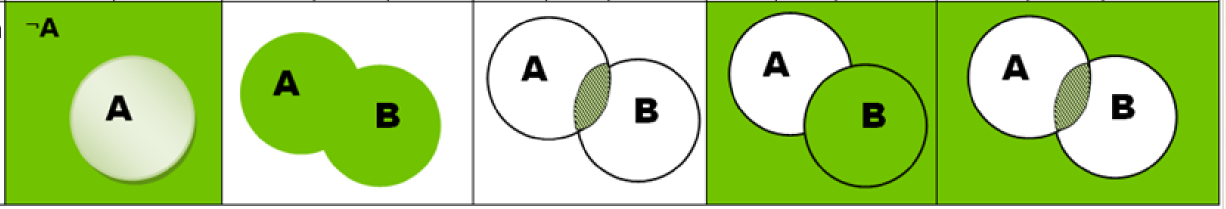


Кантор (фото - Википедия)

Да, кстати, Кантор родился в Санкт-Петербурге.., но учился в Берлинском университете (проф. Вейерштрассе).

P.S. Основатель теории множеств, но часть ее идей встречались у предшественников, например, у Б.Больцано

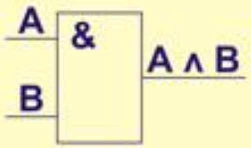
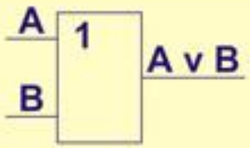
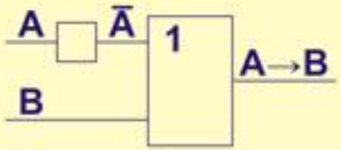
ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

	Логическое отрицание (инверсия)		Логическое сложение (дизъюнкция)			Логическое умножение (конъюнкция)			Логическое следование (импликация)			Логическая операция эквивалентности (равнозначность)		
Таблица истинности	A	¬A	A	B	A ∨ B	A	B	A^B	A	B	A→B	A	B	A↔B
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
			0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
			1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Диаграмма Эйлера-Венна														

Основные логические связки

Связка	Название	Обозначение	Полученное высказывание	Математическая запись
И	конъюнкция	&, ∧, •	А И В	A & B, A ∧ B, A • B
ИЛИ	дизъюнкция	∨, +	А ИЛИ В	A ∨ B, A + B
НЕ	отрицание, инверсия	-, ˥, ~	НЕ А	-B, ˥A, ~A
ЕСЛИ … ТО	импликация	→, ⊃	ЕСЛИ А, ТО В	A → B, A ⊃ B
ЛИБО … ЛИБО	исключающее или, неравнозначность	⊕, Δ, ≠	ЛИБО А ЛИБО В	A ⊕ B, A Δ B, A ≠ B
ЕСЛИ И ТОЛЬКО	эквивалентность, равнозначность	≡, ~	А, ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ В	A ≡ B, A ~ B

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

ОПЕРАЦИЯ	ОБОЗНАЧЕНИЕ	БЛОКИРОВАТЬ ОБЪЕКТ	ЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ИЛИ ФРАГМЕНТ СХЕМЫ
ИНВЕРСИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ ОТРИЦАНИЕ)	не A, $\bar{A}$, ¬A, not A, <>	A / $\bar{A}$: 0 / 1; 1 / 0	
КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)	A и B, A & B, A ∧ B, A and B, A • B	A / B / A ∧ B: 0 / 0 / 0; 0 / 1 / 0; 1 / 0 / 0; 1 / 1 / 1	
ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)	A или B, A + B, A | B, A ∨ B, A or B	A / B / A ∨ B: 0 / 0 / 0; 0 / 1 / 1; 1 / 0 / 1; 1 / 1 / 1	
ИМПЛИКАЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ)	если ..., то ... A → B, A ⇒ B, A or B	A / B / A → B: 0 / 0 / 1; 0 / 1 / 1; 1 / 0 / 0; 1 / 1 / 1	
ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (ЛОГИЧЕСКАЯ РАВНОЗНАЧНОСТЬ)	тогда и только тогда, когда ... A ↔ B, A = B, A ~ B	A / B / A ↔ B: 0 / 0 / 1; 0 / 1 / 0; 1 / 0 / 0; 1 / 1 / 1	 

http://shkola-rf.narod.ru

Способы задания множеств

1. Перечисление элементов (только для конечных множеств)

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$$

Пример: $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{\textit{Иванов}, \textit{Петров}, \textit{Сидоров}\}$

2. Указание характеристического свойства,
то есть свойства, которым обладают <u>все</u> элементы множества и не обладают никакие другие элементы, не принадлежащие данному множеству
(для любых множеств)

$$A = \{x / P(x)\}$$

Принцип объемности (Г.Кантор)

Множества А и В считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B,\ A \neq B$

Пример1: $A = \{x \,/\, x = 2m,\ m \in Z_+\}$

$$B = \{x \,/\, x \in Z_+,\ x = p + q,\ p = 2k_1 + 1,\ k_1 \in N,\ q = 2k_2 + 1,\ k_2 \in N\}$$

$$A = B$$

Действительно:

Пусть $x \in A$, тогда $x = 2m,\ m \in Z_+,\ x = \underbrace{(2m-1)}_{p} + \underbrace{1}_{q}$,тогда $x \in B$

Пусть $x \in B$, тогда $x = (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) = 2(k_1 + k_2 + 1)$,тогда $x \in A$

Пример2: {1,2,3} = {3,2,1}

<u>Отношение включения</u> - $\subseteq$

$A \subseteq B$, если каждый элемент множества А является элементом множества В.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\textit{Если } A \subseteq B,\ A \neq B,\ \textit{то } A \subset B$$

А – собственное подмножество множества В.

Пример: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$

Утверждение1.

1. Для любого множества Х выполняется $X \subseteq X$
2. Для любых множеств X, Y, Z выполняется следующее свойство:

   $$\textit{если} \quad X \subseteq Y, Y \subseteq Z, \quad \textit{то } X \subseteq Z$$

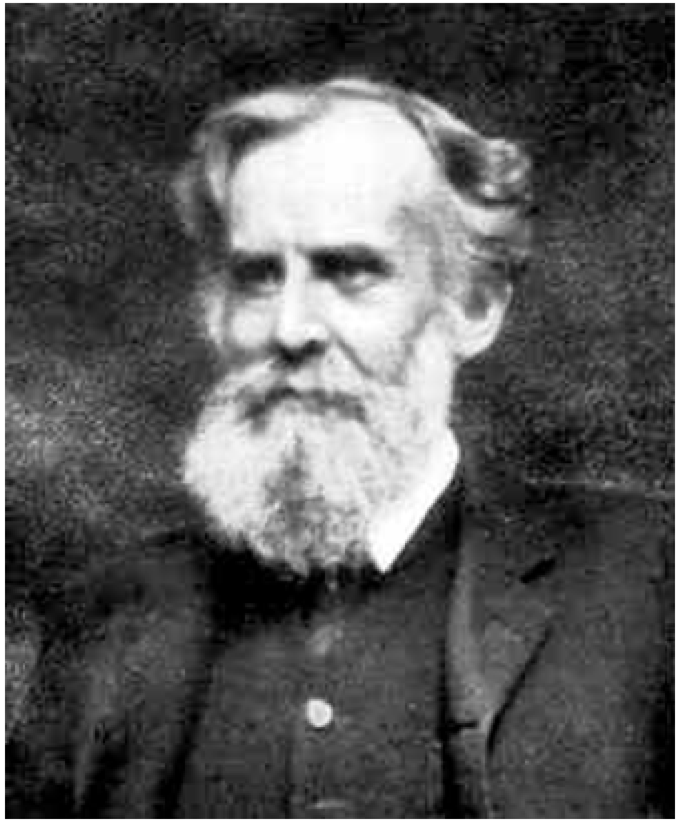
3. Для любых множеств X, Y выполняется свойство:

   $$\textit{если} \quad X \subseteq Y, Y \subseteq X, \quad \textit{то } X = Y$$

УНИВЕРСАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО – это множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов

Графическое представление множеств

Для наглядного представления отношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют ***диаграммы Дж.Венна***



Английский математик (1834-1923).

Родился в семье священника. После получения высшего образования в Кембриджском Университете стал священником (1858г.).

В 1862г. Возвращается в Кембриджский Университет как лектор. В область его интересов попадали: логика, философия и метафизика.

Венн расширил булеву математическую логику и стал автором способа представления отношений между множествами.

В 1883г. Становится доктором наук Кембриджского Университета.

Множество всех подмножеств

Множеством всех подмножеств называется ***булеан*** или ***степень-множество***

Обозначение:

A – множество

P(A) – множество всех подмножеств множества A

Утверждение2.

Если множество A состоит из n элементов, то булеан множества состоит из 2^n элементов.

$$если\ |A| = n,\ то\ P(A) = 2^n$$

Пример: $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$P(E) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

Множество всех подмножеств

Множеством всех подмножеств называется ***булеан*** или ***степень-множество***

Обозначение:

A – множество

P(A) – множество всех подмножеств множества A

Утверждение2.

Если множество A состоит из n элементов, то булеан множества состоит из 2^n элементов.

$$если\ |A| = n,\ то\ P(A) = 2^n$$

Пример:

$$E = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$P(E) = \{\varnothing, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

***Пример*:** $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

1) $(0, 0, 0) - \varnothing$

2) $(0, 0, 1) - \{a_3\}$

$(0, 1, 0) - \{a_2\}$

$(0, 1, 1) - \{a_2, a_3\}$

$(1, 0, 0) - \{a_1\}$

$(1, 0, 1) - \{a_1, a_3\}$

$(1, 1, 0) - \{a_1, a_2\}$

$(1, 1, 1) - \{a_1, a_2, a_3\}$

***<u>Пример</u>*:** $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

1) $(0, 0, 0) - \varnothing$

2) $(0, 0, 1) - \{a_3\}$

$(0, 1, 0) - \{a_2\}$

$(0, 1, 1) - \{a_2, a_3\}$

$(1, 0, 0) - \{a_1\}$

$(1, 0, 1) - \{a_1, a_3\}$

$(1, 1, 0) - \{a_1, a_2\}$

$(1, 1, 1) - \{a_1, a_2, a_3\}$

***Пример*:** $E = \{a_1, a_2, a_3\}$

1) $(0, 0, 0) - \varnothing$

2) $(0, 0, 1) - \{a_3\}$

$(0, 1, 0) - \{a_2\}$

$(0, 1, 1) - \{a_2, a_3\}$

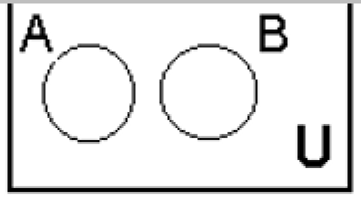
$(1, 0, 0) - \{a_1\}$

$(1, 0, 1) - \{a_1, a_3\}$

$(1, 1, 0) - \{a_1, a_2\}$

$(1, 1, 1) - \{a_1, a_2, a_3\}$

Если $A \cap B = \varnothing$, то А и В – ***непересекающиеся множества***



<u>Утверждение3.</u>

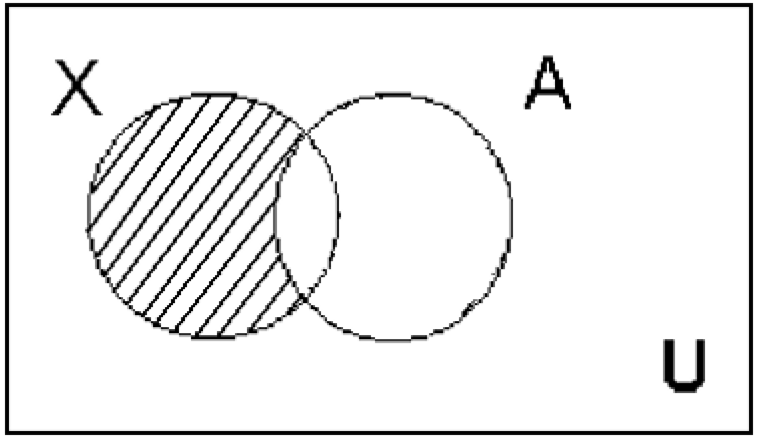
Для любых множеств А и В выполняются следующие включения:

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
2. $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

3. ***Относительное дополнение (разность)***

Разностью множеств А и В называется множество, элементы которого являются элементами множества А и не являются элементами множества В.

$$X \setminus A = \{x \,/\, x \in X \ и \ x \notin A\}$$



<u>Пример</u>:

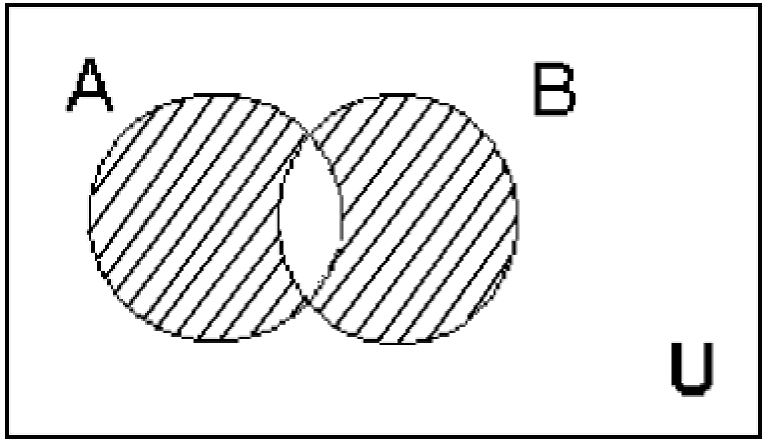
$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$X \setminus A = \{1, 2\}$

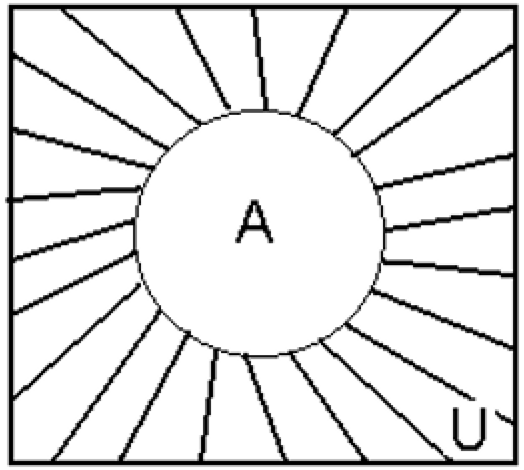
4. ***Симметрическая разность***

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



5. ***Абсолютное дополнение***

$$\overline{A} = U \setminus A$$



Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C множества U выполняются тождества:

1. ***Коммутативность***

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

2. ***Ассоциативность***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. ***Дистрибутивность***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. ***Идемпотентность***

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C множества U выполняются тождества:

1. ***Коммутативность***

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

2. ***Ассоциативность***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. ***Дистрибутивность***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. ***Идемпотентность***

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

Тео́рия алгори́тмов — наука, изучающая общие свойства и закономерности алгоритмов и разнообразные формальные модели их представления.

К задачам теории алгоритмов относятся формальное доказательство алгоритмической неразрешимости задач, асимптотический анализ сложности алгоритмов, классификация алгоритмов в соответствии с классами сложности, разработка критериев сравнительной оценки качества алгоритмов и т. п.